Polinomi di più variabili

I polinomi come funzioni

Definizione 1. *Un polinomio P di una variabile x a coefficienti reali ($P \in \mathbb{R}[x]$) è una funzione della forma*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

dove a_k sono coefficienti reali. Se $a_n \neq 0$, deiciamo che P ha grado n.

Teorema 2. *Se il polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ è tale che*

$$P(x) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R},$$

allora tutti i coefficienti di P sono nulli.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che P è della forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n \qquad \text{con} \qquad a_n \neq 0.$$

Considerare il limite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{x^n}$.

Definizione 3. *Un polinomio P di due variabili x, y a coefficienti reali ($P \in \mathbb{R}[x, y]$) è una funzione della forma*

$$P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j,$$

dove la somma è finita e dove a_{ij} sono coefficienti reali. Il grado del polinomio è

$$\deg P = \max\{i + j \ : \ a_{ij} \neq 0\}.$$

Teorema 4. *Se il polinomio $P \in \mathbb{R}[x, y]$ è tale che*

$$P(x, y) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

allora tutti i coefficienti di P sono nulli.

Dimostrazione: Scriviamo P nella forma

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} y^k P_k(x).$$

Osserviamo che $P_0(x) = P(x, 0)$. Quindi tutti i coefficienti del polinomio di una variabile P_0 sono nulli. Di conseguenza

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^{n} y^k P_k(x) = y \sum_{k=1}^{n} y^{k-1} P_k(x) = y \sum_{j=0}^{n-1} y^j P_{j+1}(x).$$

Osservare che

$$\sum_{j=0}^{n-1} y^j P_{j+1}(x) = 0 \qquad \text{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Procedere per induzione oppure ragionare per assurdo.

Iniseme degli zeri

Teorema 5 (Principio di identità tra polinomi di una variabile)**.** *Supponiamo che $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia un polinomio di una variabile e di grado $\deg P \leq n$.*
Se $P(a_i) = 0$ per $n+1$ diversi numeri reali $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1}$, allora $P \equiv 0$.

Esercizio 6. *Sia $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un polinomio di due variabili e di grado $\deg P \leq n$. Supponiamo che $P(a_i, b_i) = 0$ per $n+1$ diverse coppie $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = A, \dots, n+1$. È vero che $P \equiv 0$?*

Esercizio 7. *Trovare un polinomio P di due variabili con coefficienti reali tale che:*

(a) $P = 0$ *sulla retta* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = 0\}$.

(b) $P = 0$ *sulla circonferenza* ∂B_1.

(c) $P = 0$ *sulla parabola d'equazione* $y = x^2$.

Esercizio 8. *Siano P e Q due polinomi di due variabili e coefficienti reali. Siano Z_P e Z_Q gli insiemi degli zeri di P e Q, ovvero*

$$Z_P := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; P(x, y) = 0\big\} \qquad e \qquad Z_Q := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; Q(x, y) = 0\big\}.$$

(a) *Trovare un polinomio R tale che $Z_R = Z_P \cup Z_Q$.*

(b) *Trovare un polinomio S tale che $Z_S = Z_P \cap Z_Q$.*

Esercizio 9. *Sia P un polinomio di due variabili e coefficienti reali e sia*

$$Z_P := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; P(x, y) = 0\big\}.$$

(a) *Dimostrare che Z_P è chiuso.*

(b) *Dimostrare che $Z_P = \mathbb{R}^2$ oppure ha parte interna vuota.*

Esercizio 10. *Sia P un polinomio di due variabili e coefficienti reali e sia*

$$Z_P := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; P(x, y) = 0\big\}.$$

(a) *Dimostrare che ogni traslazione di Z_P è l'insieme degli zeri di un polinomio.*

(b) *Dimostrare che ogni rotazione di Z_P è l'insieme degli zeri di un polinomio.*

Esercizio 11. *Sia P un polinomio di due variabili e coefficienti reali e sia*

$$Z_P := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; P(x, y) = 0\big\}.$$

(a) *Mostrare che se Z_P contiene la retta*

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = 0\big\},$$

allora

$$P(x, y) = y\, Q(x, y),$$

dove Q è un polinomio di due variabili e coefficienti reali.

(b) *Mostrare che se* Z_P *contiene la retta*

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax + by + c = 0\big\},$$

allora

$$P(x,y) = (ax + by + c)\, Q(x,y),$$

dove Q *è un polinomio di due variabili e coefficienti reali.*

Esercizio 12. *Sia* P *un polinomio di due variabili e coefficienti reali e sia*

$$Z_P := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ P(x,y) = 0\big\}.$$

Mostrare che se Z_P *contiene* ∂B_1*, allora*

$$P(x,y) = \big(x^2 + y^2 - 1\big)\, Q(x,y),$$

dove Q *è un polinomio di due variabili e coefficienti reali.*

Esercizio 13. *Sia* P *un polinomio di due variabili e coefficienti reali e sia*

$$Z_P := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ P(x,y) = 0\big\}.$$

(a) *È possibile che* $Z_P = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0,\ 0 < x\big\}$ *?*

(b) *È possibile che* $Z_P = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0,\ 0 \le x \le 1\big\}$ *?*

Limiti all'infinito

Sia P un polinomio a due variabili con coefficienti reali. Per ogni vettore non-nullo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (senza perdità di generalità, possiamo assumere che $a^2 + b^2 = 1$) definiamo

$$L_{(a,b)} := \lim_{t \to +\infty} P(ta, tb).$$

Esercizio 14. *Trovare un polinomio* P *tale che:*

$$L_{(a,b)} = \begin{cases} +\infty & \textit{se} \quad b \neq 0 \\ 0 & \textit{se} \quad b = 0. \end{cases}$$

Esercizio 15. *Trovare un polinomio* P *tale che:*

$$L_{(a,b)} = \begin{cases} +\infty & \textit{se} \quad b \neq 0 \\ +\infty & \textit{se} \quad b = 0,\ a > 0 \\ -\infty & \textit{se} \quad b = 0,\ a < 0. \end{cases}$$

Esercizio 16. *Trovare un polinomio* P *tale che:*

$$L_{(a,b)} = \begin{cases} +\infty & \textit{se} \quad b \neq 0 \\ -\infty & \textit{se} \quad b = 0,\ a > 0 \\ 1 & \textit{se} \quad b = 0,\ a < 0. \end{cases}$$

Esercizio 17. *Trovare un polinomio P tale che:*

$$L_{(a,b)} = \begin{cases} -\infty & se \quad b \neq 0 \\ 2 & se \quad b = 0, \; a > 0 \\ 2 & se \quad b = 0, \; a < 0. \end{cases}$$

Esercizio 18. *Dimostrare che se $L_{(a,b)}$ è finito allora $L_{(a,b)} = P(0,0)$.*

Limiti all'infinito - parte II

Esercizio 19. *Trovare un polinomio $P \in \mathbb{R}[x,y]$ tale che*

$$\lim_{x\to\infty} P(x,1) = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to\infty} P(x,2) = -\infty.$$

Esercizio 20. *Mostrare che esiste un polinomio $P \in \mathbb{R}[x,y]$ tale che*

$$\lim_{x\to\infty} P(x,1) = +\infty\ , \quad \lim_{x\to\infty} P(x,2) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} P(x,3) = +\infty\ , \quad \lim_{x\to\infty} P(x,4) = -\infty.$$

Usare il lemma seguente.

Teorema 21. *Siano $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ n diversi numeri reali e siano $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Dimostrare che esiste un polinomio di una variabile $P \in \mathbb{R}[x]$ e di grado $\deg P = n-1$ tale che*

$$P(a_i) = b_i \quad per\ ogni \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dimostrazione: Per dimostrare il teorema, fissato $i = 1, \ldots, n$, si trovi un polinomio P_i (di grado $n-1$) tale che

$$P(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i, \\ 0 & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Esercizio 22. *Mostrare che non esiste un polinomio $P \in \mathbb{R}[x,y]$ tale che*

$$\lim_{x\to\infty} P(x,n) = \begin{cases} +\infty & se\ n\ \grave{e}\ pari, \\ -\infty & se\ n\ \grave{e}\ dispari. \end{cases}$$

Esercizio 23. *Mostrare che non esiste un polinomio $P \in \mathbb{R}[x,y]$ di grado $\deg P \leq 10$ tale che*

$$\lim_{t\to\infty} P\left(t\cos\frac{k\pi}{100}, t\cos\frac{k\pi}{100}\right) = \begin{cases} +\infty & se\ k\ \grave{e}\ pari, \\ -\infty & se\ k\ \grave{e}\ dispari. \end{cases}$$

Polinomi omogenei

Definizione 24. *Sia $\alpha \geq 0$ un numero reale. Diciamo che la funzione $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è α-omogenea se*

$$F(tx) = t^\alpha F(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d \quad \text{ed ogni} \quad t > 0.$$

Osservazione 25. *In dimensione uno, gli unici polinomi omogenei sono quelli della forma*

$$P(x) = c_k x^k,$$

per una qualche costante reale c_k.

Osservazione 26. *Tutti i polinomi della forma*

$$P_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{n-j}$$

sono n-omogenei.

Osservazione 27. *Ogni polinomio $P \in \mathbb{R}[x, y]$ di grado n puo essere scritto come*

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x, y),$$

dove i polinomi P_k sono della forma $P_k(x, y) = \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}\, x^j y^{k-j}$.

Proposizione 28. *Sia $P \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio di grado n. Se P è α-omogeneo (per un qualche α reale), allora $\alpha = n$ e P è della forma*

$$P(x, y) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{n-j}.$$

Dimostrazione:

1. Scrivere P come somma di polinomi omogenei $P = \sum_{k=0}^{n} P_k$.
2. Prendere un punto (x, y) tale che $P_n(x, y) \neq 0$. Per dimostrare che $\alpha = n$, considerare il limite
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{P(tx, ty)}{t^\alpha}.$$
3. Per dimostrare che $P_{n-1} = \cdots = P_0 = 0$, considerare, per ogni punto (x, y), il polinomio (nella variabile t)
$$t^n P(x, y) - \sum_{k=0}^{n} t^k P_k(x, y).$$

Gradiente

Osserviamo che i polinomi 1-omogenei in $\mathbb{R}^2$ sono della forma

$$P(x, y) = ax + by.$$

In $\mathbb{R}^n$ invece i polinomi 1-omogenei di n variabili sono tutti della forma

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ ,$$

che possiamo scrivere anche come

$$P(x) = a \cdot x \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

dove

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

è un vettore fissato. Osserviamo che, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$a_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(0),$$

dove $\dfrac{\partial P}{\partial x_i}(0, \dots, 0)$ è la derivata parziale (calcolata nel punto $(0, \dots, 0)$)

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) := \lim_{t \to 0} \frac{P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + h, \dots, \bar{x}_n) - P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n)}{h}.$$

Si ha quindi che

$$a = \nabla P(0),$$

dove la funzione $\nabla P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è il gradiente

$$\nabla P = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n} \right).$$

Proposizione 29 (Sviluppo di Taylor al primo ordine)**.**

(i) *Sia $P \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio di due variabili. Dimostrare che esiste una costante M (che dipende da P) tale che*

$$\big| P(x, y) - P(0, 0) - (x, y) \cdot \nabla P(0, 0) \big| \leq M \big(x^2 + y^2 \big),$$

per ogni $(x, y) \in B_1$.

(ii) *Analogamente, se $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ è un polinomio di n variabili. Allora, esiste $M > 0$ tale che*

$$\big| P(X) - P(0) - X \cdot \nabla P(0) \big| \leq M|X|^2 \qquad \text{per ogni} \qquad X = (x_1, \dots, x_n) \in B_1.$$

Esercizio 30. *Calcolare il gradiente ∇P nel punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per i polinomi seguenti*

(1) $P(x, y) = x^2 + xy + y^2$;

(2) $P(x, y) = x^3 + x^2 y^2$;

(3) $P(x, y) = xy + 2x + 3y$,

(4) $P(x, y) = x - y$;

(5) $P(x, y) = x^2 + y^2$.

Matrice Hessiana

I polinomi 2-omogenei in $\mathbb{R}^2$ sono della forma

$$P(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy,$$

dove a, b e c sono costanti reali. Invece in $\mathbb{R}^n$ i polinomi 2-omogenei di n variabili sono della forma

$$P(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j,$$

che possiamo scrivere anche come

$$P(x) = x^tAx \quad \text{per ogni} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

dove x^t indica il vettore riga $x^t = (x_1,\dots,x_n)$ e dove $A = (a_{ij})_{ij}$ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Osservare che per ogni coppia $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le n$ si ha

$$\partial_i\partial_jP = a_{ij} + a_{ji}.$$

Quindi, possiamo scrivere $P(x)$ come

$$P(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{ij}P(0)\,x_ix_j = \frac{1}{2}x^tHx,$$

dove $H = \big(\partial_{ij}P(0)\big)_{ij}$ è la seguente **matrice Hessiana** (calcolata in zero)

$$H = \begin{pmatrix} \partial_{11}P & \dots & \partial_{1n}P \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}P & \dots & \partial_{nn}P \end{pmatrix}.$$

Esercizio 31. *Sia $P \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio di due variabili in $\mathbb{R}^2$. Mostrare che*

$$\partial_x\partial_yP(x,y) = \partial_y\partial_xP(x,y) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 32. *Sia $P \in \mathbb{R}[x_1,x_2]$ un polinomio di grado n scritto nella forma*

$$P(x_1,x_2) = \sum_{k=0}^n P_k(x_1,x_2),$$

dove i polinomi P_k sono polinomi k-omogenei. Mostrare che

(a) *$P_0(x_1,x_2)$ è la costante $P(0,0)$.*

(b) *$P_1(x) = x \cdot \nabla P(0,0)$.*

(c) $P_2(x) = \frac{1}{2}x^t H(0,0)x$, *dove* $H(x_1, x_2)$ *è la matrice Hessiana*

$$H(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{pmatrix} \partial_{11}P(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \partial_{12}P(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \partial_{21}P(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \partial_{22}P(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}.$$

Proposizione 33 (Sviluppo di Taylor al secondo ordine)**.**

(i) *Sia* $P \in \mathbb{R}[x, y]$ *un polinomio di due variabili. Dimostrare che esiste una costante* M *(che dipende da* P*) tale che*

$$\left| P(x, y) - P(0, 0) - (x, y) \cdot \nabla P(0, 0) - \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} \partial_{xx}P(0, 0) & \partial_{xy}P(0, 0) \\ \partial_{yx}P(0, 0) & \partial_{yy}P(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \le M\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3,$$

per ogni $(x, y) \in B_1$.

(ii) *Analogamente, se* $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ *è un polinomio di* n *variabili. Allora, esiste* $M > 0$ *tale che*

$$\left| P(X) - P(0) - X \cdot \nabla P(0) - \frac{1}{2}X^t H(0)X \right| \le M|X|^3 \qquad \textit{per ogni} \qquad X = (x_1, \dots, x_n) \in B_1,$$

dove $H(0)$ *è la matrice Hessiana clacolata nel punto* $0 = (0, \dots, 0)$

$$H = \begin{pmatrix} \partial_{11}P & \dots & \partial_{1n}P \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}P & \dots & \partial_{nn}P \end{pmatrix}.$$

Esercizio 34. *Sia* $P \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ *un polinomio di grado* n *scritto nella forma*

$$P(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x_1, x_2),$$

dove i polinomi P_k *sono polinomi* k*-omogenei. Mostrare che:*

(a) *se* P *ha un minimo in zero, allora* $P_1 \equiv 0$ *e* $P_2 \ge 0$*;*

(b) *se* $P_1 \equiv 0$ *e se* $P_2(x) > 0$ *per ogni* $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$*, allora* P *ha un minilmo in* $(0, 0)$.

Esercizio: polinomi omogenei e funzioni trigonometriche

Esercizio 35. *Dimostrare che per ogni* $n \ge 1$ *esistono polinomi* n*-omogenei* $P_n \in \mathbb{R}[x, y]$ *e* $Q_n \in \mathbb{R}[x, y]$ *tali che*

$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta, \sin\theta) \quad \textit{per ogni} \quad \theta \in [0, 2\pi];$$
$$\sin(n\theta) = Q_n(\cos\theta, \sin\theta) \quad \textit{per ogni} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Polinomi e convessità

Esercizio 36. *Sia* $P \in \mathbb{R}[x, y]$ *un polinomio convesso di grado dispari. Dimostrare che* $\deg P = 1$.

Esercizio 37. *Sia* $P \in \mathbb{R}[x, y]$ *un polinomio tale che*

$$\partial_x^2 P(x, y) \ge 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\partial_y^2 P(x, y) \ge 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

È vero che P *è convesso?*

Esercizio 38. *Sia $P \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio tale che*

$$\partial_x^2 P(x,y) > 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\partial_y^2 P(x,y) > 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

È vero che P è convesso?

Esercizio 39. *Sia $P \in \mathbb{R}[x_1,x_2]$ un polinomio omogeneo di grado 2. Dimostrare che P è convesso se e solo se*

$$P \geq 0 \quad \textit{su} \quad \partial B_1.$$

Soluzione:
($\Rightarrow$). Fare il limite all'inifinito.
($\Leftarrow$). Scrivere $P(x)$ come $x^t A x$ dove A è una matrice simmetrica. Dimostrare che la positività di P implica la disuguaglianza

$$|x^t A y| \leq (x^t A x)^{1/2}\,(y^t A y)^{1/2}.$$

Concludere scrivendo

$$\begin{aligned} P(tx+(1-t)y) &= t^2 x^t A x + (1-t)^2 y^t A y + 2t(1-t) x^t A y \\ &\leq t^2 x^t A x + (1-t)^2 y^t A y + 2t(1-t)(x^t A x)^{1/2}\,(y^t A y)^{1/2} \\ &= \Big(t(x^t A x)^{1/2} + (1-t)(y^t A y)^{1/2}\Big)^2. \\ &\leq tP(x) + (1-t)P(y), \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che la funzione (di una variabile) x^2 è convessa.

Esercizio 40. *Sia $P \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio omogeneo di grado n tale che $P \geq 0$ su ∂B_1.*

(a) *È vero che n deve essere di grado pari ?*

(b) *È vero che P deve essere convesso ?*

Proposizione 41. *Sia $P \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio. Allora P è convesso se e solo se*

$$H(x,y) \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

dove $H(x,y)$ è la matrice Hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} P(x,y) & \partial_{xy} P(x,y) \\ \partial_{yx} P(x,y) & \partial_{yy} P(x,y) \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione: Data una retta

$$x(t) = x_0 + ax, \quad y(t) = y_0 + bt,$$

Dimostrare che

$$\partial_{tt}\Big[P\big(x(t),y(t)\big)\Big] = \big(x'(t), y'(t)\big)\, H\big(x(t),y(t)\big) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 42. *Sia $P \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio convesso tale che*

$$P(0,0) = P(1,0) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} P(x,y) = 0.$$

(a) *Dimostrare che*

$$P(x,0) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) *Dimostrare che*

$$P(x,y) = y^2 Q(x,y)$$

per un qualche polinomio $Q \in \mathbb{R}[x,y]$.

(c) *Dimostrare che*

$$Q(x,0) \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}.$$